EXERCICE N°1 — 6 points — 30'

On se propose dans cet exercice de calculer l'intégrale $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ \ln(\sin t)\,dt$

1. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x\in]-1,1[$, on a : $f(x)=a+\dfrac{b}{1-x}+\dfrac{c}{1+x}$

b) En déduire la primitive F de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0.

2. Soit G la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $G(x)=F(\cos x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$ et que $G'(x)=\dfrac{-\cos^2(x)}{\sin(x)}$

b) En déduire la valeur de $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx$

3. Calculer alors I.

EXERCICE N°2 — 6 points — 35'

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=-2x^2-1+\ln(x)$

1. a) Dresser le tableau de variation de g.

b) En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x)<0$.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x)}{x}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que la droite $\mathscr{D}: y=-x+1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

3. a) Vérifier que pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f .

4. a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse *e.*

b) Tracer $\mathscr{C}$

EXERCICE N°3 — 6 points — 35'

A) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$.

1. Montrer que pour $x>0$ on a : $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

2. Dresser le tableau de variation de g .

3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet, dans $]0,+\infty[$, une solution unique α et vérifier que $0.5<\alpha<0.6$.

4. Donner alors signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

B) On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm)

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x)$ (on pourra poser $t=\frac{1}{x^2}$) .

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

3. a) Montrer que : $\forall x>0; f'(x)=g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4. a) Montrer que $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (on prendra $\alpha\approx0.5$ et $f(\alpha)\approx0.8$).

5. Montrer que la fonction F définie par : $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

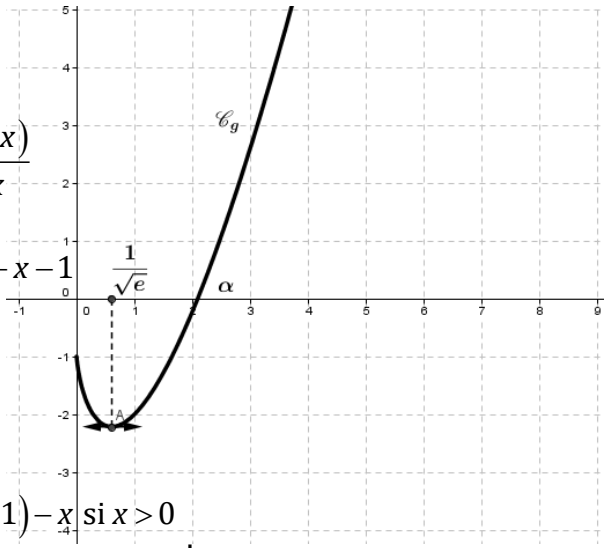
EXERCICE N°4 — 7 points — 40'

Partie A

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisses α et admet une branche parabolique de direction $(O;\vec{j})$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

La tangente au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$ est horizontale et la tangente en $A(1;-2)$ passe par $B(0;-3)$.



Par lecture graphique:

1. a) Déterminer $g(\alpha)$ et donner le signe de g .

b) Déterminer $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ et $g'(1)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$

2. La fonction g est définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=2x.\ln(x)-x-1$

Vérifier que : $\ln(\alpha)=\frac{\alpha+1}{2\alpha}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases} x^2(\ln(x)-1)-x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

2. a) Montrer que pour tout $x>0$; $f'(x)=g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Dresser le tableau de variation de f et montrer que $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2+\alpha}{2}$

3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x$.

a) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

b) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. (en prendra $\alpha\approx 2$)

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com
M1